À ma Lorraine, romane et tiche
Meinem Lothringen, wèlsch un dèitsch

Vorwort

Zwei Strömungen tragen und trennen die Mathematik seit Anbeginn. Die erste treibt zur Aussenwelt, ist konstruktiv, berechnend, algorithmisch. Die zweite ist Verinnerlichung, Spiel am Modell, Spekulation. Die erste schwillt an, stetig und besonnen, in einer Umwelt von Technik und Computern. Die zweite flutet frei von äusseren Zwängen, prallte an die Neuzeit und hätte schier die Schule überschwemmt.

Ein Einführungskurs auf Hochschulebene muss wohl beiden Strömungen folgen. Wir wenden uns zunächst der algorithmischen zu und lassen ihr den grösseren Raum. Die Begriffe, die sie führt, sind konkret, die angeschwemmte Materie leicht zu fassen, ihr Kern mal weich mal hart, doch meist gut zu verwerten. Wer an ihren Ufern watet, entlockt ihr schon manch nützlich Gut und muss dafür nicht Meisterschwimmer werden.

Nur Meisterschwimmer wollen wir jedoch, am Ende dieses Kurses, noch bis zum Meer abstrakter Spekulationen führen. Glücklos bliebe in dieser Weite, wen Gott dafür nicht schuf. Gute Beute erzielt aber dort, wer Talent paart mit Erfahrung, mit guter Kenntnis strandnäherer Gewässer.

Wir schwimmen also mit den Strömen. Wir schwimmen aber auch gegen den Strom, zur Quelle der Geometrie. In deren Transparenz üben wir die ersten Kunstgriffe abstrakten Denkens, übertragen räumliche Begriffe in fremde Bereiche und entdecken die verborgene Verwandtschaft unterschiedlicher Wissensarten.
Doch nur, was vorhanden ist, lässt sich auch übertragen. Leider haben die elementargeometrischen Vorstellungen, die das Gymnasium verbreitet, aber nicht die Schärfe, die die Hochschule voraussetzt. Es nützt da wenig, dass der Professor ein $\mathbf{R}^3$ an die Tafel schreibt und ein zweidimensionales Bild des Raumes dazu zeichnet. Der Sprung bleibt gross vom konkreten Bild zum abstrakten $\mathbf{R}^3$. Verschwommen sind die konzeptuellen Grenzen, zwischen Punkten etwa und Vektoren, zu wenig eingeübt ist das Wechselspiel zwischen Gleichungen und Gebilden. Zusätzliches Training tut hier not.

Modellierung – die Aufstellung mathematischer Modelle zur Beschreibung aussermathematischer Prozesse – will früh geübt sein. Die Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Geometrie hat auch diesen Zweck. Sie führt insbesondere zur klaren Trennung zwischen dem Raum der Physik und dem Denkmodell der Mathematik. Beim numerischen Modell $\mathbf{R}^3$ ist die Trennlinie nicht mehr erkennbar, zu gross ist die Distanz zur Physik. Zur Überprüfung der logischen Kohärenz mag die Konstruktion eines Modells aus der axiomatischen Mengen-lehre geeignet sein. Wer aber Beweis und Experiment gegenüberstellt, will sein Modell von physikalischen Beobachtungen ableiten. Das Unterfangen ist bekanntlich heikel. Wir hoffen, einen Weg gefunden zu haben, der den Bedürfnissen eines Einführungskurses einigermassen entspricht.

Die unüblich starke Betonung der Elementargeometrie dient schliesslich auch der Veranschaulichung des zentralen Begriffs dieses Buches, dem der Transformationsgruppen. Die Elementargeometrie liefert das erforderliche Anschauungsmaterial für die vielen abstrakten Gruppen und Normalformen der höheren Mathematik. Die Hochschule hat auch hier nachzuliefern, was das Gymnasium nicht bieten kann, weil sein Zuhörerkreis weiter gefasst ist und Transformationsgruppen ihre Bedeutung erst auf höherer Stufe offenlegen.

Zur Lockerung des Lehrstoffes haben wir neben der Mathematik auch einige ihrer Akteure vorgestellt. Mathematik ist keine transzendente Wahrheit, sie ist das Werk von Menschen, die in einem gewissen historischen Umfeld leben. Wir skizzieren dieses Umfeld, weil wir fest glauben, dass die Geschichte ein guter Lehrer ist. Doch nicht nur deshalb. Wir wollen auch ganz einfach Momente der Entspannung einbauen. Möge auch die von uns ausgesuchte Skurrilität diesem Zwecke dienen und uns die grossen Akteure etwas näherbringen.

Unsere Schrift ist somit Lehr- und Lesebuch. Die historischen Seiten seien als Lesestücke empfohlen, manche gar als 'Strassenbahnlektüre'. Wir gliedern den mathematischen Text in drei Teile, wobei wir die ersten beiden in zwei Leitfäden zusammenstellen. Leitfaden I enthält den 'irreduziblen' Kern einer Anfängervorlesung in Linearer Algebra. Dieser Kern nimmt etwas mehr als ein Viertel der Schrift ein, insgesamt etwa 170 Seiten: eine Zahl, die wir wohl als ausgesprochen menschlich betrachten dürfen. Leitfaden II präsentiert den eingebauten Wiederholungskurs in Geometrie (etwa 100 Seiten). Der Kurs ist als Stoff für ein Proseminar gedacht. Die restlichen 110 Seiten weisen in die Zukunft.

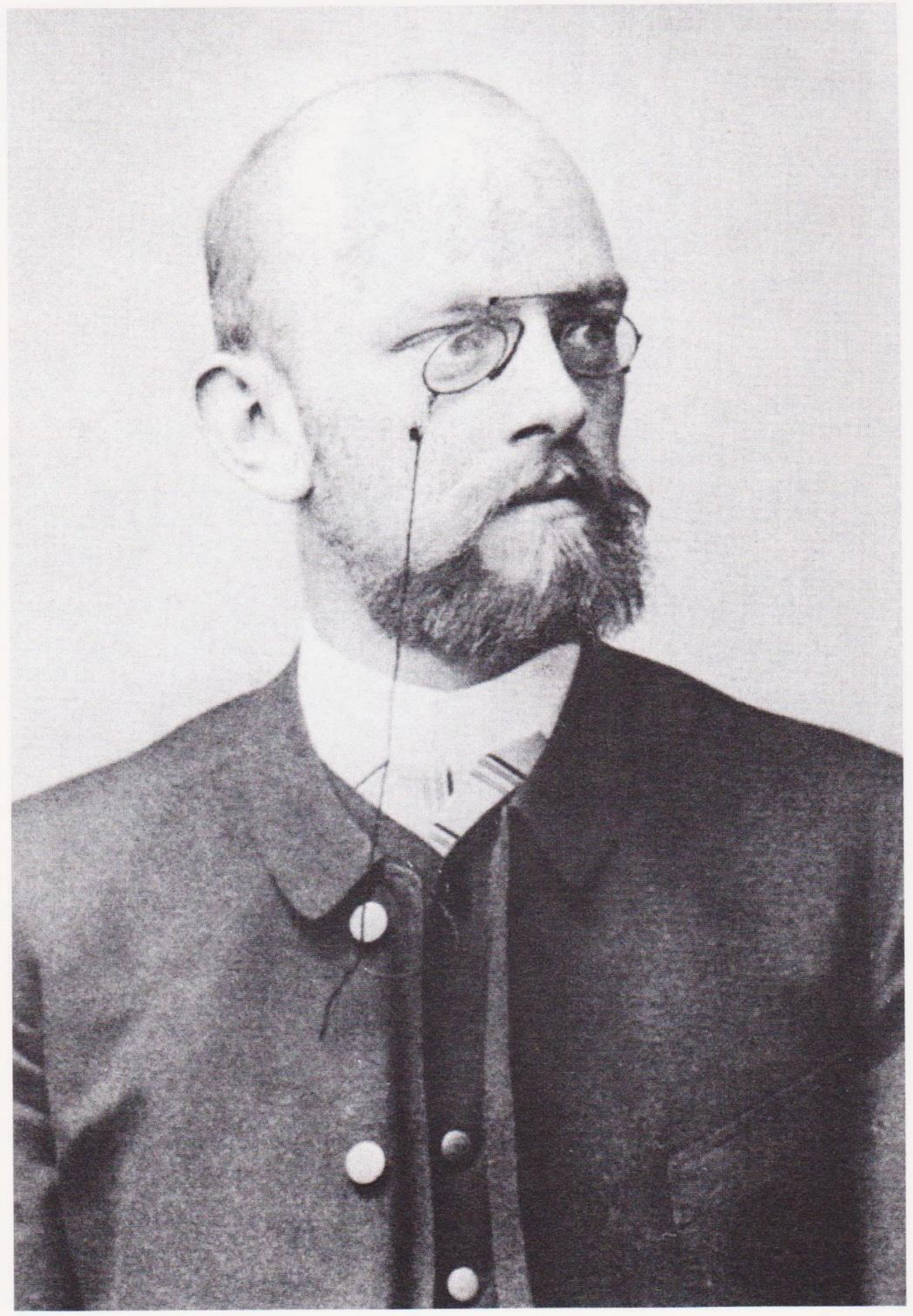
Das vorliegende Lehrbuch ist das Ergebnis vieler Grundvorlesungen, die ich innert 33 Jahre in Metz, Strassburg, Bonn und Zürich hielt. Es trägt die Spuren vieler Einflüsse, die mich zu Dank verpflichten. Keinen Dank jedoch will ich dem Lande zollen, das mich am Fusse einer Zitadelle als einen der wenigen Träumer gebar, denen Pierre Fourier noch immer Vorbild ist. Mit Krieg gab es mir vier Jahre Unterricht in der angestammten Heimatsprache, mit Frieden den von Plücker so sehr bewunderten Schliff franzmännischer Mathematik. Das Land hat geformt und zerrissen. Ich widme ihm diesen Versuch in der Heimatsprache als Ausdruck, nicht des Dankes, doch meiner ausweglosen Verbundenheit.

Zwei Landsleute haben grossen indirekten Einfluss auf das Werk genommen: Der erste, Joseph Billmann, Meister mathematischer Präzision, hat mit deutschem Staatsexamen und französischer 'agrégation' viele Jahrgänge von Letztklässlern am Metzer Lyzeum ausgebildet, das dazumal noch nicht den Namen eines Generals trug. Dem Weitblick des zweiten, Pierre Cartier, verdanke ich die Sicht hinter Bourbakis Kulisse; einen matriziellen Zugang zur Linearen Algebra erlernte ich 1961 in seinem Kurs für die Kadetten der 'Royale'.

Ansonsten zolle ich meinen Dank den zahlreichen Freunden und Schülern die manche Stelle ausbesserten und nach Tippfehlern Ausschau hielten. Die Namen vieler habe ich vergessen; sie mögen mir verzeihen. Nennen muss ich jedenfalls Herbert Amann, Ursula Ausderau, Markus Brodmann, Thomas Brüstle, Ernst Dieterich, Patrick Guidotti, Thomas Guidon, Erich Gut, Ernst Gutknecht, Urs Hassler, Bernhard Keller, Enrico Leuzinger, Erwin Neuenschwander, Claudio Ortelli, Markus Petermann, Yuan Shen und Dieter Vossieck. Für effiziente Verlagsarbeit und Bereinigung der Druckvorlage geht mein Dank an Thomas Hintermann und Herrn Stephan Ammann. Speziell danke ich auch Frédéric, der so liebevoll um meine Deutschkenntnisse besorgt war.

Bitsch, den 1. August 1995

Inhaltsverzeichnis



DAVID HILBERT

(1862–1943)